

URE: Reconocimiento local de umbrales mediante autovalores

Aplicación comparada a mecánica, fluidos y óptica

Documento de síntesis - 20 de agosto de 2026

Idea central. Para reconocer un Umbral de Régimen Emergente (URE) no es necesario conocer el límite total o global del sistema. Puede bastar medir, desde la vecindad de una interfase R_0 , el autovalor dominante de la dinámica local y reconocer cuándo su parte real pierde capacidad restauradora.

1. Analogía con el número de Graham

El número de Graham es demasiado grande para escribirse de forma explícita, pero ciertas propiedades locales pueden conocerse exactamente mediante aritmética modular. En particular, su última cifra es 7. La lección metodológica es que una propiedad exacta puede ser accesible sin recorrer la totalidad del objeto.

En la búsqueda URE la traducción propuesta es:

No necesitamos conocer el límite. Necesitamos conocer su huella local.

El candidato a esa huella es el autovalor dominante de la dinámica linealizada alrededor del estado observado.

2. Detector local de R_0

Sea un sistema con estado x^* y una perturbación pequeña δx . Localmente,

$$\delta \dot{x} = J \delta x,$$

con autovalores definidos por

$$Jv_i = \lambda_i v_i.$$

Si el modo dominante tiene

$$\lambda_{\text{dom}} = \alpha + i\omega,$$

la respuesta temporal posee la forma aproximada

$$\delta x(t) \sim Ae^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi).$$

La parte real $\alpha = \text{Re } \lambda_{\text{dom}}$ determina la estabilidad local:

Condición	Lectura física
$\text{Re } \lambda_{\text{dom}} < 0$	El régimen restaura la perturbación y permanece estable.
$\text{Re } \lambda_{\text{dom}} \rightarrow 0$	Se aproxima una pérdida de estabilidad; aumenta el tiempo de relajación.
$\text{Re } \lambda_{\text{dom}} = 0$	Frontera crítica local.
$\text{Re } \lambda_{\text{dom}} > 0$	El régimen anterior pierde estabilidad.

Además,

$$\tau_{\text{relax}} \approx \frac{1}{|\text{Re } \lambda_{\text{dom}}|},$$

por lo que el acercamiento al umbral puede detectarse como *critical slowing down*. Este fenómeno es física convencional conocida; aquí se usa como instrumento de localización, no como evidencia TICR.

3. Prueba mínima en una bifurcación de Hopf

Como banco matemático se emplea la forma normal supercrítica

$$\dot{z} = (\mu + i\omega)z - |z|^2 z.$$

Cerca de $z = 0$,

$$\lambda_{\pm} = \mu \pm i\omega.$$

Por tanto,

$$\text{Re } \lambda_{\text{dom}} = \mu.$$

Al variar μ se obtiene directamente la firma

$$\boxed{- \longrightarrow 0 \longrightarrow +}$$

sin necesidad de conocer un límite global del sistema. Para $\mu > 0$ aparece un nuevo estado estable con amplitud

$$r_* = \sqrt{\mu},$$

y el autovalor radial alrededor del nuevo régimen es

$$\lambda_{\text{nuevo}} = -2\mu.$$

Esta secuencia sirve como referencia para aplicar el detector a sistemas físicos distintos.

4. Aplicación 1: pandeo de Euler

Para una columna articulada,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

Definimos el control reducido

$$\mu = \frac{P}{P_{cr}} - 1.$$

Cerca del pandeo, una forma normal mínima es

$$\tau \dot{A} = \mu A - \beta A^3.$$

Por tanto,

$$\lambda_{\text{viejo}} \tau = \mu.$$

Con $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 10^{-8} \text{ m}^4$ y $L = 1 \text{ m}$,

$$P_{cr} \approx 19,739 \text{ kN}.$$

P/P_{cr}	$P \text{ (kN)}$	$\lambda_{\text{viejo}} \tau$
0.80	15.79	-0.20
0.95	18.75	-0.05
1.00	19.74	0
1.05	20.73	+0.05
1.20	23.69	+0.20

Por encima del umbral aparece el estado doblado y, para la misma forma normal,

$$\lambda_{\text{nuevo}} \tau = -2\mu.$$

5. Aplicación 2: convección de Rayleigh-Bénard

Para una capa de fluido calentada desde abajo, el estado conductivo pierde estabilidad cerca del número crítico

$$Ra_c \simeq 1707,76$$

para la configuración estándar de placas rígidas isotermas.

Definimos

$$\mu = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}.$$

La amplitud del modo convectivo cerca del inicio obedece nuevamente

$$\tau \dot{A} = \mu A - \beta A^3,$$

de modo que

$$\lambda_{\text{conducción}} \tau = \mu.$$

Ra	$\lambda_{\text{viejo}} \tau$
1500	-0.1217
1650	-0.0338
1707.76	0
1760	+0.0306
1900	+0.1126

El detector vuelve a encontrar la transición local

$$\boxed{- \rightarrow 0 \rightarrow +}.$$

6. Aplicación 3: umbral láser

En un láser, el umbral se alcanza cuando la ganancia compensa las pérdidas. Definimos

$$p = \frac{G}{G_{th}}, \quad \mu = p - 1.$$

Una forma normal para la envolvente óptica es

$$\tau \dot{E} = \mu E - \beta |E|^2 E.$$

Así,

$$\lambda_{\text{OFF}} \tau = p - 1.$$

G/G_{th}	$\lambda_{\text{OFF}} \tau$
0.80	-0.20
0.95	-0.05
1.00	0
1.05	+0.05
1.20	+0.20

Una vez establecido el régimen de emisión,

$$\lambda_{\text{ON}} \tau = -2\mu.$$

7. Firma local comparada

Los tres sistemas - columna, fluido y láser - poseen mecanismos físicos, escalas y unidades diferentes. Sin embargo, cerca del umbral comparten la misma estructura normal supercrítica.

Definimos una firma local:

$$\mathcal{F}_{R_0} = (\text{sgn } \lambda_-, \lambda_0, \text{sgn } \lambda_+, Q),$$

con

$$Q = \frac{|\lambda_{\text{nuevo}}|}{|\lambda_{\text{viejo}}^{(+)}|}.$$

Para la forma normal cúbica utilizada,

$$\mathcal{F}_{R_0} = (-, 0, +, 2).$$

Resultado central. Es posible reconocer localmente un cambio de régimen sin conocer el límite global del sistema. El cero de $\text{Re } \lambda_{\text{dom}}$ localiza la frontera; la estructura de autovalores antes y después caracteriza el tipo de transición.

8. Qué significa para URE

La firma $\text{Re } \lambda \rightarrow 0$ no constituye evidencia TICR. Es un comportamiento estándar de muchas bifurcaciones y pertenece a clases de universalidad conocidas.

Por tanto, el detector URE debe operar en dos niveles:

$$\text{Re } \lambda_{\text{dom}} \rightarrow 0 \implies \text{localización de } R_0$$

seguido de

$$\mathcal{F}_{R_0} \implies \text{clasificación de la emergencia}$$

La búsqueda TICR sólo comienza si la huella observada no se reduce a una clase convencional de bifurcación, transición de fase, metastabilidad o dinámica conocida.

9. Conclusión

La analogía con Graham queda operacionalizada:

$$\text{objeto global inaccesible} \longrightarrow \text{invariante local accesible.}$$

En URE, el candidato mínimo es

$$\Lambda(q) = \text{Re } \lambda_{\text{dom}}(q)$$

con frontera localizada por

$$\Lambda(q_c) = 0.$$

La secuencia experimental mínima queda:

PERTURBAR $\rightarrow$ MEDIR RELAJACIÓN $\rightarrow$ EXTRAER λ
 $\rightarrow$ LOCALIZAR $R_0 \rightarrow$ CLASIFICAR LA HUELLA

El paso siguiente ya no consiste en buscar un número o frecuencia límite gigantesca. Consiste en comprobar si, al cambiar de sistema y de escala, aparece una huella local reproducible que exceda las clases de universalidad convencionales.

Documento de trabajo TICR / URE. La identificación de una bifurcación o autovalor crítico es física convencional; cualquier interpretación TICR requiere un residual experimental adicional.